حل یک مسئله از هندسه به روش پولیا

ابراهیم ریحانی
گروه ریاضی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی

کلیدواژه‌ها: جرج پولیا، هندسهٔ فضایی، وضع خطوط در فضا.

چکیده

«شورای ملی معلمان ریاضی»[1] (NCTM) امریکا در سند اصول و استانداردها برای ریاضیات مدرسه (۲۰۰۰)، حل مسئله را درگیر شدن در وظیفه، تکلیف و فعالیتی می‌داند که راه‌حل آن از پیش شناخته شده نیست، به این خاطر برای یافتن راه‌حل، دانش‌آموزان باید آن را از درون دانش خودشان بیرون بکشند و از مسیر این فرایند، درک و فهم جدید ریاضی را در خود رشد و توسعه دهند. با توجه به نقش و جایگاه روش پولیا برای حل مسئله، در این مقاله روش پولیا را در قالب حل یک مسئلهٔ هندسه توضیح می‌دهیم.

■ **مسئله: اگر A، B، C و D چهار نقطه در فضا باشند و در یک صفحه قرار نداشته باشند، خط‌هایی که از دوبه‌دوی این نقطه‌ها می‌گذرند، نسبت به هم چگونه‌اند؟**

● **حل:** سعی می‌کنیم این مسئله را به کمک الگوی پولیا با «فرهنگ آموزشی حل مسئله» حل کنیم. روش پولیا چهار مرحله دارد: فهمیدن؛ طرح یک نقشه؛ اجرای نقشه؛ بازگشت یا نگاه به عقب. در اولین مرحله، یعنی «فهمیدن مسئله»، همان‌طور که پولیا می‌گوید: «باید به‌صورتی آشکار بدانیم که چه چیزی خواسته شده است». طبق این الگو، شاگرد باید در این مرحله بتواند بخش‌های اصلی مسئله، یعنی «مجهول»، «داده‌ها» و «شرط» مسئله را تعیین کند. در مسئلهٔ فوق مجهول «وضعیت تعدادی خط نسبت به هم در فضاست». داده‌ها «چهار نقطهٔ A، B، C و D در فضا هستند» و شرط مسئله این است که «A، B، C و D در یک صفحه واقع نباشند». پولیا فهمیدن مسئله را به دو مرحله تقسیم می‌کند: «آشنا شدن» و «کار کردن برای فهم بهتر».

آشنایی با مسئله می‌تواند همان چیزی باشد که در سطرهای بالا ذکر شد؛ یعنی معین کردن بخش‌های اصلی مسئله و در ادامه، به منظور «کار کردن برای فهم بهتر» مجهول، داده‌ها و شرط مسئله و ارتباط آن‌ها با یکدیگر، به‌صورت مسئله مراجعه می‌کنیم. منظور از «وضعیت»، وضعیت تعدادی خط در فضاست که به روشنی در کتاب درسی ذکر شده است: «دو خط در فضا نسبت به هم یکی از سه وضعیت متنافر، متوازی یا متقاطع را دارند.»

داده‌های مسئله همان‌طور که ذکر شد چهار نقطهٔ A، B، C و D در فضا هستند که شرط «در یک صفحه نبودن» بر آن‌ها قرار گرفته است. برای فهم بهتر مسئله، مناسب است بررسی کنیم که: «آیا شرط مسئله می‌تواند برقرار شود؟» آیا این موضوع ارتباطی با مطالبی که در متن درس ذکر شده است، دارد؟ در حقیقت اصل

چهار که می‌گوید: «حداقل چهار نقطه در فضا وجود دارد که بر یک صفحه قرار ندارند»، امکان تحقق شــرط مسئله را تأمین می‌کند.

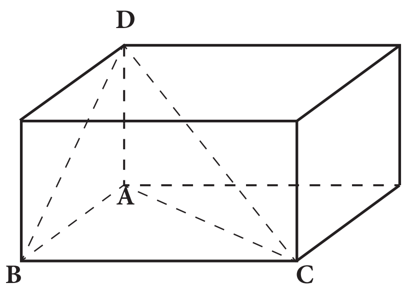
شــاید دقیقاً نتوان مشخص کرد کــه از چه زمانــی وارد مرحلــهٔ دوم، یعنی «طرح نقشه» می‌شویم. همواره ارتباط‌هایــی بین فهم یک مســئله و طرح یک نقشــه برای حــل آن وجود دارد. بــه هر میزان کــه درک بهتری از مسئله حاصل شــود، احتمال طرح نقشه‌ای برای حل آن بیشتر خواهد شد. به هر حال، گاهی برای دستیابی به یک نقشه، بهتر است مسائل مشابه و حالات خاص مسئله را بررسی کنیم. مسئله برای حالت دو نقطه به چه شکل درمی‌آید؟ در این حالت شرط مسئله را باید به‌صورت دو نقطهٔ متمایز که داده شده‌اند بیان کنیم.

از دو نقطــه در فضــا، یــک و تنهــا یــک خط می‌گذرد. بنابراین مســئله‌ای برای طرح کردن به‌وجود نمی‌آیــد. حال به بررســی مســئله با ســه نقطهٔ B، A و C در فضــا می‌پردازیم. یعنی بررســی می‌کنیم کــه اگر ســه نقطه در فضا داشــته باشــیم، وضعیت خط‌هایــی که از دوبــه‌دوی آن‌ها می‌گذرند، نســبت به‌هم چگونه است؟

در مورد ســه نقطهٔ A، B و C آیا اصلی شبیه اصل چهار برقرار است؟ به عبارت دیگر، آیا سه نقطه در فضا یافت می‌شــوند که نتوان آن‌هــا را در یک صفحه قرار داد؟ بــا توجه به اینکه از هر ســه نقطهٔ دلخواه در فضا می‌توان صفحه‌ای گذراند، پاسخ این سؤال منفی است. از طــرف دیگر، صفحه‌ای کــه از A، B و C می‌گذرد، شامل خطوطی که از این نقاط می‌گذرند نیز هست. سه نقطهٔ A، B و C به هر صورتی که در فضا اختیار شوند، باز هم می‌توان صفحه‌ای را شامل هر سه آن‌ها به‌دست آورد. در ایــن صورت، اگر آن ســه نقطه بر یک امتداد نباشند، خطوط به‌دست آمده، با توجه به اینکه در یک صفحه هستند، دوبه‌دو متقاطع‌اند. بنابراین یافتن دو یا ســه نقطه در فضا که نتوان آن‌ها را در یک صفحه قرار داد، امکان‌پذیر نیست، اما ممکن است چهار نقطه در فضا یافت که نتوان آن‌ها را در صفحه‌ای قرار داد.

در حقیقت ما در مرحلهٔ طرح نقشه به‌سر می‌بریم.

تلاش‌هایمان را بــرای یافتن ارتباط میان داده‌ها و مجهول ادامه می‌دهیم. سعی می‌کنیم نشان دهیم که چگونه اجزای متفاوت مسئله به‌هم وابسته‌اند. یک‌بار دیگر به‌صورت مســئله رجوع می‌کنیم. حال که شرط مسئله قابل تحقق اســت، آیا می‌توانیم نمونه‌ای ملموس از آن را نشان دهیم؟ آیا در محیط اطرافمان مثال مناسبی یافت می‌شــود؟ اشــکالی ندارد، اگر مثال حالت خاصــی را دربربگیرد. چگونه می‌توان از کلاسی که به شکل مکعب مستطیل اســت، برای توضیح این مســئله و یافتن راه‌حل آن (اگرچه در حالتی خاص) استفاده کرد؟ یکی از حالت‌های ممکن در شکل ۱ دیده می‌شود.



شکل ۱

A، B و C را ســه نقطه در صفحهٔ کف اتاق (ســه رأس مســتطیل کف اتاق) و D را نقطه‌ای خارج از این صفحه ـ مثلاً یک رأس مســتطیل ـ روی سقف اتاق در نظر می‌گیریم. در این حالت خط‌هایی که از دوبه‌دو این نقاط می‌گذرند، کدام‌ها هســتند؟ آیا شکل کمک می‌کند؟ حالت‌های ممکن عبارت‌اند از:

DA, DB, DC, AB, AC, BC

بررسی وضعیت خطوط فوق به کمک شکل ساده اســت. برای مثال، AD و AB متقاطع‌اند و AD و BC متنافرند. بقیهٔ حالات باقی‌مانده را می‌توان به‌ترتیب فوق بررسی کرد. اجازه دهید کمی به عقب برگردیم. آیا در مسئله حالتی اتفاق می‌افتد که سه نقطه از چهار نقطه روی یک امتداد قرار گیرند؟ در این صورت چه اتفاقی رخ می‌دهد؟ اگر ســه نقطه از چهار نقطهٔ A، B، C و

همواره ارتباط‌هایی بین فهم یک مسئله و طرح یک نقشه برای حل آن وجود دارد. به هر میزان که درک بهتری از مسئله حاصل شود، احتمال طرح نقشه‌ای برای حل آن بیشتر خواهد شد

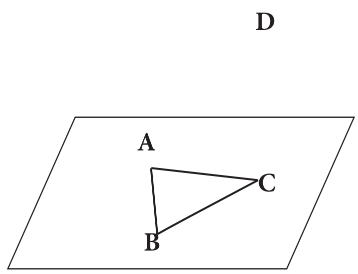
به گفتهٔ پولیا برای یافتن جواب مسئله، باید به‌صورت مکرر دیدگاه و طرز نگاه خود به مسئله را عوض کنیم

D روی یک خط باشند، آن‌گاه این خط به همراه نقطهٔ چهارم یک صفحه را معلوم می‌کنند که با شرط مسئله، یعنی «واقع نبودن چهار نقطه در یک صفحه» سازگاری ندارد. بنابراین وضعیت چهار نقطـهٔ A، B، C و D به گونه‌ای است که هیچ سه‌تای آن‌ها روی یک خط راست قرار ندارند.

به گفتهٔ پولیا برای یافتن جواب مسئله، باید به‌صورت مکرر دیدگاه و طرز نگاه خود به مسئله را عوض کنیم. بار دیگر به مسئله برمی‌گردیم. دو نکتهٔ مهم را مورد توجه قرار می‌دهیم: نکتهٔ اول اینکه چهار نقطهٔ A، B، C و D در فضا داریم که هیچ سه‌تای آن‌ها روی یک خط راست قرار ندارند. نکتهٔ دوم اینکه آیا با الهام از مکعب مستطیل می‌توان ایده‌ای کلی برای حل مسئله ارائه کرد؟ از نکتهٔ اول چه چیزی عایدمان می‌شود؟ کدام اصل در کتاب با این موضوع مرتبط است؟

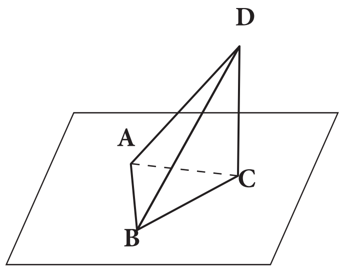
اصل ۲: از هر سه نقطه در فضا که بر یک خط قرار ندارند، یک و تنها یک صفحه می‌گذرد.

چگونه می‌توان از این مطلب برای حل مسئله استفاده کرد؟ ساده‌ترین موضوع قابل بیان این است که از سه تا از چهار نقطهٔ بالا، مثلاً از B، C و D می‌توان صفحه‌ای مانند P گذراند. در این صورت موقعیت D نسبت به این صفحه چگونه خواهد بود؟ D نقطه‌ای خارج صفحهٔ P است. با این کار قسمتی از مسئله را حل کرده‌ایم. به‌عبارت دیگر، وضعیت خطوطی که از دوبه‌دو نقاط، A، B و C می‌گذرند (AC، AB و BC) را می‌توان معلوم کرد. همانند آنچه که در حالت خاص (شکل ۱) داشتیم، سه خط دوبه‌دو متقاطع هستند.



شکل ۲

حال با الهام از شکل ۱، شکل ۲ را تکمیل می‌کنیم و حل مسئله در حالت کلی حاصل می‌شود. چهاروجهی ABCD در شکل ۱ کدام شکل فضایی را معلوم می‌کند؟ آیا مشابه این وضعیت برای شکل ۲ قابل دسترسی است؟ دیده می‌شود که اگر در شکل ۲ از D به A، B و C وصل کنیم، شکل ۳ به‌دست می‌آید که در اینجا نیز یک چهاروجهی یا هرم ABCD حاصل می‌شود.



شکل ۳

حال به بررسی وضعیت خطوطی که از دوبه‌دوی این نقاط گذشته‌اند (یعنی خطوط DC، DA، AB، BC، DB، و AC) می‌پردازیم. به‌طور نمونه، DA و AC متقاطع (در نقطهٔ A) و DA و BC متنافر هستند. توجه داریم که اگر DA و BC متنافر نباشند، آن‌گاه یا موازی هستند و یا متقاطع و در هر صورت از آن‌ها یک و تنها یک صفحه می‌گذرد. این با شرط مسئله که چهار نقطـهٔ A، B، C و D در یک صفحه قرار ندارند، سازگاری ندارد. وضعیت خط‌هایی که از دوبه‌دوی نقاط A، B، C و D می‌گذرند، به این شرح است: زوج‌های (DA, AC)، (DB, C)، (DB, AB)، (DA, DB)، (AB, AC)، (AB, BC)، (DA, CD)، (DA, AB)، (DB, BC)، (DC, AC)، (DC, BC) و (AC, BC) متقاطع هستند و زوج‌های (BD, AC)، (DA, BC) و (DC, AB) متنافرند.

اما باز هم اجازه دهید به عقب برگردیم. آیا مسئله به روش دیگری نیز قابل حل است؟ آیا بدون رسم شکل نیز می‌توانستیم خطوطی را که از دوبه‌دو نقاط ، B، C، A و D می‌گذرند، تعیین کنیم؟ یکی از **حالت‌ها** را در نظر می‌گیریم؛ مثلاً AB. AB چگونه به‌دست می‌آید؟ AB خطی است که از A و B می‌گذرد. از طرف دیگر، برای به‌دست آوردن آن مثل این است که حروف A و B را کنار یکدیگر قرار داده‌ایم. شاید چیزی مثل قرار دادن ارقام کنار هم که اعدادی را به‌دست می‌دهند. مثلاً ۲ و ۱ که ۱۲ و ۲۱ را به‌دست می‌دهند. آیا BA خط جدیدی را به‌دست می‌دهد؟ خیر، زیرا خطی که از A و B می‌گذرد، همان خطی است که از B و A می‌گذرد. به‌عبارت دیگر، ترتیب قرار گرفتن A و B در کنار هم مهم نیست.

در کدام قسمت دیگر از ریاضیات با چنین موضوعی مواجه شده‌اید که در آن ترتیب و تکرار اهمیتی ندارد؟ «مجموعه‌ها» پاسخی طبیعی به این سؤال به‌شمار می‌رود. چگونه می‌توان مسئله (جزئی) فوق، یعنی تعیین خطوطی که از دوبه‌دو نقاط A، B، C و D می‌گذرند را با یک مسئله مشابه در مجموعه‌ها مقایسه کرد؟ اگر چند خط دیگر را معین کنیم، مسئله واضح‌تر می‌شود. AD، BC و DB سه خط دیگر هستند. هر کدام از آن‌ها دو جزء دارند و یا به بیان دقیق‌تر، یک ترکیب دو حرفی هستند؛ ترکیب‌های دو حرفی (غیرتکراری) که از چهار حرف A، B، C و D به‌دست می‌آیند. مسئلهٔ مشابه آن در مجموعه‌ها چیست؟

قبل از پاسخ به پرسش فوق یادآور می‌شویم، همان‌گونه که پولیا می‌گوید: «استاد باید کمک کند، ولی نه بسیار زیاد و نه بسیار کم؛ تا چنان باشد که برای دانشجو سهم قابل قبولی از کاری که باید انجام دهد بر جای بماند.» و نیز: «معلم باید آمادهٔ آن باشد که اگر این اشاره [راهنمایی] برای برانگیختن شاگردان کافی [مناسب] نباشد، درصدد یافتن چاره‌ای دیگر برآید، و بدین ترتیب باید آمادگی آن را داشته باشد که رفته‌رفته به اشاره‌های صریح‌تری متوسل شود.»

به آخرین سؤال مطرح شده باز می‌گردیم. ترکیب‌های دوحرفی (غیرتکراری) از حروف A، B، C و D که در آن‌ها ترتیب قرار گرفتن حروف اهمیتی ندارد، مشابه مسئلهٔ به‌دست آوردن زیرمجموعه‌های دو عضوی از یک مجموعهٔ چهار عضوی است. تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی یک مجموعه چهار عضوی چه‌قدر است؟ پاسخ همان تعداد ترکیب‌های دو حرفی از چهار حرف A، B، C و D است که برابر ۶ می‌شود. این ترکیب‌ها و یا همان خطوط حاصل که از دوبه‌دو نقاط A، B، C و D می‌گذرند، عبارت‌اند از: BC، AC، AB، DC، DB و DA.

یک‌بار دیگر به مسئلهٔ تعیین وضعیت این ۶ خط نسبت به یکدیگر باز می‌گردیم. یک زوج از آن‌ها را مثال بزنید که متقاطع باشند. (DA, DB) یک مثال است. آیا (DB, DA) زوج جدیدی است؟ خیر همان قبلی است. تعداد زوج‌های ممکن چه‌قدر است؟ چگونه می‌توان همهٔ آن‌ها را شمرد و مطمئن بود که چیزی از قلم نیفتاده است؟ آیا مسئله‌ای مشابه ۶ خط به‌دست آمده از نقاط A، B، C و D داریم؟ آیا این مسئله (جزئی) را می‌توان با بیانی دیگر مطرح کرد؟

«مجموعه‌ای شامل شش خط متفاوت، چه تعداد حالات مختلف را دوبه‌دو نسبت به هم دارا هستند؟». آیا این نیز مسئله‌ای از نوع ترکیب است؟»

پاسخ $۱۵=\binom{۶}{۲}$ است که همان ترکیب‌های دوعضوی از یک مجموعهٔ شش عضوی است. این ۱۵ زوج در زیر فهرست شده‌اند:

۵ ← (DA, DB), (DA, DC), (DA, AB), (DA, AC), (DA, BC)

۴ ← (DB, DC), (DB, AB), (DB, AC), (DB, BC)

۳ ← (DC, AB), (DC, AC), (DC, BC)

۲ ← (AB, AC), (AB, BC)

۱ ← (AC, BC)

$$\binom{۶}{۲}=۱۵$$

واضح است که امکان دارد دانش‌آموزان به شیوه‌های متفاوتی فهرستی از این ۱۵ زوج خطوط را ارائه کنند. در روش فوق ابتدا زوج‌هایی که از DA و پنج خط دیگر غیر از آن حاصل می‌شوند، فهرست شده‌اند و در سطر دوم همین کار با DB انجام شده است؛ با این تفاوت که موارد تکراری حذف شده‌اند و کار به‌همین منوال ادامه یافته است. بین زوج‌های داده شده، کدام‌ها متقاطع هستند؟ چه روش ساده‌ای برای تعیین آن‌ها وجود دارد؟ مثلاً واضح است که هر زوجی که دارای یک حرف مشترک هستند، متقاطع‌اند. تعداد این زوج‌ها دوازده تاست که عبارت‌اند از:

(DA, DB), (DA, DC), (DA, AB), (DA, AC), (DB, DC), (DB, AB), (DB, BC), (DC, AC), (DC, BC), (AB, AC), (AB, BC), (AC, BC)

کدام‌ها باقی مانده‌اند؟

(DA, BC), (DC, AB), (DB, AC)

آن‌ها را روی شکل نشان دهید. آیا هیچ‌یک از این سه زوج خطوط می‌توانند متقاطع یا موازی باشند؟ اگر به‌طور مثال (DA, BC) موازی یا متقاطع باشند، چه اتفاقی می‌افتد؟ همان‌گونه که قبلاً بیان شد صفحه‌ای شامل آن‌ها به‌دست می‌آید که با فرض مسئله در تناقض است. پس (DA, BC) و نیز دو حالت باقی‌مانده متنافر هستند و در ضمن مطمئن هستیم که حالت دیگری وجود ندارد.

پی‌نوشت

1. National Council of Teachers of Mathematics

منابع

۱. پولیا، جورج (۱۹۴۵). **چگونه مسئله را حل کنیم**. ترجمهٔ احمد آرام. انتشارات کیهان. تهران. چاپ دوم.
2. National Council of Teachers of Mathematics (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: Author